



**IL QUADRO DI RIFERIMENTO DELLE PROVE DI MATEMATICA
DEL SISTEMA NAZIONALE DI VALUTAZIONE**

INDICE

1. A chi si rivolge il Quadro di Riferimento.
2. Le finalità istituzionali: normativa e direttive. Il disegno della rilevazione.
3. Quale matematica: Indicazioni nazionali e Linee Guida.
4. La struttura delle prove.
 - 4.1 Le caratteristiche generali delle prove e le tipologie delle domande.
 - 4.2 I principi di formulazione delle domande e i criteri di costruzione dei fascicoli.
 - 4.3 Gli autori delle domande e delle prove.
 - 4.4 Il pretest.
5. Le prove INVALSI nel panorama internazionale.
6. La restituzione dei risultati.
 - 6.1 Livelli di restituzione dei risultati: MIUR, scuola, classe.
 - 6.2 La restituzione alle classi dei risultati della prova di Matematica.
 - 6.3 Strumenti di supporto.
7. Allegati.
 - a. I Traguardi e le Dimensioni.
 - b. Esempi di domande.

1. A chi si rivolge il Quadro di Riferimento.

Questo documento presenta il Quadro di Riferimento (QdR) per la costruzione delle prove di matematica per il sistema delle Rilevazioni Nazionali dell'INVALSI, per le classi dalla seconda primaria alla seconda secondaria di secondo grado. La futura prova per la classe quinta della scuola secondaria di secondo grado sarà oggetto di un apposito quadro di riferimento in cui sarà presentata la struttura della prova, con esempi.

Il QdR esplicita i principali punti di riferimento concettuali, i collegamenti con le indicazioni di legge, le idee chiave che guidano la progettazione delle prove, alcune indicazioni sull'evoluzione degli strumenti messi in campo negli anni per migliorare il sistema delle Rilevazioni Nazionali.

A questo proposito va ricordato che si tratta di un quadro di riferimento per la *valutazione*, non di un quadro di riferimento per i curricoli e quindi va collegato al quadro generale nel quale sono formulati i curricoli della scuola italiana, che a loro volta hanno subito in questi anni un'evoluzione che li ha portati all'attuale sistemazione organica.

Il QdR, coerentemente con il sistema delle Indicazioni di legge che attraverso vari documenti regolano i curricoli, è pensato in una ottica di stretta continuità tra le prove per le classi del primo ciclo di istruzione (classi seconda e quinta primaria e terza secondaria di primo grado) e le prove per le classi del secondo ciclo (attualmente classe seconda della scuola secondaria di secondo grado; DAL 2019 anche la classe quinta della scuola secondaria di secondo grado).

Il QdR si rivolge in primo luogo alle persone che propongono i quesiti e ai gruppi di lavoro che a diversi livelli li elaborano, ne seguono i pretest sul campo e sulla base dei risultati di essi compongono i fascicoli delle prove. Indica i vari aspetti dell'apprendimento da valutare e stabilisce un equilibrio tra i diversi ambiti. È quindi uno strumento fondamentale nella fase preparatoria delle prove (fascicoli).

Il QdR è poi pensato per aiutare gli attori del sistema scolastico (insegnanti, dirigenti, famiglie) a *interpretare i risultati* ottenuti dalle singole scuole o dalle singole classi nelle prove delle Rilevazioni Nazionali. La comparazione dei risultati delle proprie classi o della propria istituzione scolastica con gli esiti complessivi delle prove, interpretati alla luce della conoscenza del contesto specifico in cui la propria scuola opera, può servire per individuare i punti di forza e di debolezza del percorso effettivamente realizzato in classe e delle scelte didattiche effettuate; può inoltre aiutare il coordinamento della progettazione didattica all'interno delle singole istituzioni scolastiche. I diversi termini di paragone (*benchmark*) proposti, elaborati partendo dal campione statistico, arricchiti e resi più articolati nel corso degli anni, possono costituire un termine di confronto per le singole scuole o anche per i singoli insegnanti allo scopo di condurre una riflessione autonoma (che tenga sempre conto delle caratteristiche del contesto in cui si opera) sia sugli apprendimenti raggiunti dagli allievi (curricolo raggiunto), sia sulla validità delle scelte didattiche, sull'efficacia dell'offerta formativa e infine sull'ampiezza, profondità e coerenza del curriculum effettivamente svolto (curricolo effettivo).

Il QdR può essere adoperato dai responsabili ai diversi livelli (Ministero dell'Istruzione, Uffici Scolastici Regionali, Dirigenti scolastici) come strumento per interpretare i risultati del sistema nel suo complesso, per poter adottare opportune strategie di intervento, per esempio relativamente alla predisposizione di attività particolari di recupero o rafforzamento per gli studenti o di piani di formazione in servizio per i docenti.

Il QdR, infine, può offrire agli studenti e alle famiglie informazioni utili per capire il significato della valutazione come momento cruciale del percorso scolastico e come momento di verifica del sistema.

Tutte queste osservazioni portano a riflettere sull'importante effetto di ricaduta che il complesso delle prove delle Rilevazioni Nazionali ha sull'intero sistema scolastico e sulle sue scelte didattiche. È proprio in questo senso, come si è già detto, che un'attenta analisi dei risultati delle prove somministrate potrà contribuire a fornire una guida per il miglioramento dell'offerta del sistema di istruzione nel suo complesso, di ogni istituzione scolastica e dei docenti in particolare.

Questa versione del QdR è stata elaborata anche basandosi sull'esperienza maturata in questi anni, a partire dalla prima prova Nazionale del 2008 e sulle riflessioni e le discussioni che questa novità ha innescato tra insegnanti, esperti, dirigenti, studenti e famiglie. In questi anni le prove sono state somministrate in formato cartaceo ma gli elementi fondamentali del quadro sono alla base anche della predisposizione delle prove *computer based* (CBT) previste dalle ultime evoluzioni della normativa.

2. Le finalità istituzionali: normativa e direttive. Il disegno della rilevazione.¹

L'INVALSI (cfr. d. lgs. n.286/2004) ha il compito di “attuare verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti”. Con l’art. 5 della legge 176/07 il legislatore ha inoltre stabilito che “a decorrere dall’anno scolastico 2007-2008 il Ministro della pubblica istruzione fissa, con direttiva annuale, gli obiettivi della valutazione esterna condotta dal Servizio nazionale di valutazione in relazione al sistema scolastico e ai livelli di apprendimento degli studenti, per effettuare verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti, di norma, alla classe seconda e quinta della scuola primaria, alla prima e terza classe della scuola secondaria di primo grado e alla seconda e quinta classe del secondo ciclo, nonché altre rilevazioni necessarie per la valutazione del valore aggiunto realizzato dalle scuole”.

Con la direttiva n. 74 del 2008 il Ministro ha stabilito che a regime tutte le classi indicate nella legge fossero sottoposte a rilevazione annuale degli apprendimenti. Nella fase transitoria la rilevazione si è progressivamente estesa dalle classi di scuola primaria (2008-2009) alle altre classi fino alla classe seconda della secondaria di secondo grado (2010-2011). Dal 2014 non viene più realizzata la rilevazione nella classe prima della secondaria di primo grado in quanto questo livello di studi viene monitorato dalla prova nella classe terza a conclusione del primo ciclo di studi. Fino all’anno 2016-2017 la prova è interna all’esame di stato e contribuisce alla valutazione finale per circa il 15-20%².

A partire dall’a.s. 2017-18 i decreti legislativi emanati in virtù della legge 107/2015 introducono diverse novità che riguardano anche le prove INVALSI. In particolare la prova standardizzata per la classe terza alla fine del primo ciclo d’istruzione sarà svolta nel corso dell’anno, sarà obbligatoria ai fini dell’ammissione all’esame di Stato e i suoi esiti saranno riportati nell’attestazione delle competenze dell’allievo, senza però incidere sul voto finale d’esame. Nello stesso decreto legislativo viene definito il ruolo della futura prova standardizzata per la classe quinta della scuola secondaria di secondo grado, al termine del secondo ciclo di istruzione. Essa si collega all’esame di Stato conclusivo del secondo ciclo d’istruzione nello stesso modo della prova realizzata al termine del ciclo secondario di primo grado.

La figura riporta i livelli scolastici coinvolti nelle rilevazioni standardizzate dall’a.s. 2007-2008 al 2015-2016.

	a.s. 2007/08	a.s. 2008/09	a.s. 2009/10	a.s. 2010/11	a.s. 2011/12	a.s. 2012/13	a.s. 2013/14	a.s. 2014/15	a.s. 2015/16	a.s. 2016/17	a.s. 2017/18	a.s. 2018/19
Livello 2												
Livello 5												
Livello 6												
Livello 8												
Livello 10												
Livello 13												

Fig. 1 Disegno delle rilevazioni INVALSI

¹ Per una visione completa della normativa di riferimento si può fare riferimento a questo link

<http://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=normativa>

² Un interessante lavoro di ricerca su rapporto fra prova INVALSI ed esame di stato alla fine del primo ciclo si può vedere nel report di Angela Martini http://www.invalsi.it/download2/wp/wp28_Martini.pdf

Infine il regolamento del Sistema Nazionale di Valutazione (SNV) in materia di istruzione e di formazione (D.P.R. 80/2013) affida all'INVALSI il compito di ricercare metodologie e di individuare strumenti utili a valutare la qualità e l'efficacia dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche. La valutazione delle scuole è quindi uno dei pilastri del Servizio Nazionale di Valutazione, insieme alla valutazione degli apprendimenti. La valutazione della singola istituzione scolastica comprende, nello stesso "procedimento di valutazione" (art. 6 D.P.R. 80/2013), il processo di autovalutazione, che include l'analisi dei risultati delle prove INVALSI, la valutazione esterna condotta sulla base di indicatori elaborati da INVALSI, le azioni di miglioramento e la rendicontazione sociale.

.

3. Quale matematica: Indicazioni Nazionali e Linee Guida

La matematica come disciplina ha sempre coinvolto due aspetti, peraltro strettamente collegati tra loro:

- uno rivolto alla modellizzazione e alle applicazioni per leggere, interpretare la realtà e risolvere problemi della vita concreta;
- l'altro rivolto allo sviluppo interno, alla riflessione e alle speculazioni sugli stessi prodotti culturali dell'attività matematica.

Di ciò è necessario tenere conto nella didattica della matematica e nella valutazione dei processi di insegnamento-apprendimento.

Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* si dedica molta attenzione alla matematica come strumento per operare nella realtà e si invita esplicitamente a evitare di ridurre le conoscenze matematiche a un insieme di regole da applicare per risolvere problemi standardizzati. In particolare, nella sezione dedicata alle differenti discipline, alla voce *Matematica* si dice che al termine del primo ciclo di istruzione “è di estrema importanza lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo”. Più avanti, nei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria* è scritto che lo studente “Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà”, affermazione che viene ripetuta, rafforzandola, nei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado*: “Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà”.

Anche nelle *Indicazioni nazionali per i licei* i diversi aspetti legati alla matematica e alle sue applicazioni sono chiaramente ed esplicitamente richiamati nella sezione *Linee generali e competenze*: “lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico”. Anche nelle *Linee guida* per gli istituti tecnici e professionali, nel paragrafo relativo al primo biennio, *Il raccordo tra l'area di istruzione generale e l'area di indirizzo*, si accenna a questi aspetti, pur se in modo non del tutto esplicito: “L'asse matematico garantisce l'acquisizione di saperi e competenze che pongono lo studente nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo. Al termine dell'obbligo d'istruzione, gli studenti acquisiscono le abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie ed altrui”. Più avanti, nella declinazione degli obiettivi specifici disciplinari del biennio, alla sezione *Matematica*, si precisa: “Nella scelta dei problemi, è opportuno fare riferimento sia ad aspetti interni alla matematica, sia ad aspetti specifici collegati ad ambiti scientifici (economico, sociale, tecnologico) o, più in generale, al mondo reale”.

Anche nel triennio delle *Linee guida* per gli istituti tecnici e professionali, nel paragrafo *Il raccordo tra le discipline dell'area generale e delle aree di indirizzo*, si legge: “Le competenze matematico-scientifiche contribuiscono alla comprensione critica della dimensione teorico-culturale dei saperi e delle conoscenze proprie del pensiero matematico e scientifico. Lo studio della matematica permette di utilizzare linguaggi specifici per la rappresentazione e soluzione di problemi scientifici, economici e tecnologici e stimola gli studenti a individuare le interconnessioni tra i saperi in quanto permette di riconoscere i momenti significativi nella storia del pensiero matematico”. Analogamente, nella

declinazione degli obiettivi specifici disciplinari del triennio, alla sezione *Matematica*, si precisa: “Il docente di Matematica concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica; possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate; collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche”.

In tutti gli ordini e i livelli di istruzione vi è quindi un riferimento più o meno esplicito e più o meno forte a considerare la matematica sia come strumento utile nella vita concreta sia come un prodotto culturale che riguarda le speculazioni più libere dello spirito umano. Di conseguenza emerge un’immagine della disciplina ben lontana da quella di insieme di tecniche e regole fini a se stesse o utili esclusivamente a successivi sviluppi interni. Le indicazioni curriculari invitano chi insegna ad aiutare gli studenti ad acquisire consapevolezza dell’importanza di entrambi gli aspetti, in modo che emerga un’immagine della matematica come disciplina dotata di forte unità culturale, come rete di prodotti culturali emersi da un’attività dell’intelletto umano in ogni tempo e in ogni civiltà.

Questo quadro di riferimento all’interno del quale si esplicitano le indicazioni di legge per tutti i livelli scolastici è alla base del disegno delle prove del sistema delle Rilevazioni Nazionali dell’INVALSI e ne costituisce il fondamento concettuale e operativo.

Le diverse indicazioni entrano poi maggiormente nei dettagli, più o meno esplicitamente, dei contenuti irrinunciabili e delle competenze essenziali che gli studenti devono conseguire in matematica al termine dei vari cicli scolastici. Talvolta le finalità dell’insegnamento-apprendimento della matematica sono dichiarate esplicitamente per punti, in termini di obiettivi per l’apprendimento o di conoscenze e abilità o traguardi per lo sviluppo delle competenze; altre volte, come nelle *Indicazioni per i licei* sono presenti all’interno di un discorso narrativo, anche se articolato e puntuale.

Ciò che emerge chiaramente, a tutti i livelli scolari, sono:

- i quattro ambiti di contenuto, talvolta etichettati con differenti denominazioni, (per esempio l’ambito *Numeri* del primo ciclo diventa, nelle *Linee guida* e nelle *Indicazioni per i licei*, *Aritmetica e algebra*, così come *Spazio e figure* diventa *Geometria*), ma chiaramente individuabili come campi di contenuto specifici;
- la necessità di progettare percorsi che, nel conseguimento dei contenuti irrinunciabili, non perdano mai di vista lo sviluppo di competenze il cui conseguimento è ineludibile per il possesso di quella cultura matematica che aiuti a partecipare in modo informato, consapevole e critico alle scelte sempre più delicate che la vita pubblica impone: rappresentare oggetti matematici e relazioni fra essi, operare con queste rappresentazioni e passare dall’una all’altra ove opportuno; argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere, prestando attenzione agli artifici retorici utili a sostenere e spiegare le proprie argomentazioni; porsi e risolvere problemi; utilizzare e costruire modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti; sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, imparando a vederla come prodotto culturale fortemente unitario e operativo;
- l’invito a realizzare attività di carattere laboratoriale, dove per laboratorio si intende un contesto di insegnamento-apprendimento caratterizzato dall’interazione sociale (lo studente che collabora e si confronta con propri pari e con gli esperti) e dalla mediazione giocata dall’uso degli strumenti nei processi di acquisizione di conoscenza; in particolare si precisa che è necessario che gli studenti imparino a utilizzare le tecnologie oggi disponibili al fine di costruire significati degli oggetti di studio mediante l’esplorazione di ambiti di contenuto in ambienti che consentano di operare con rappresentazioni diversificate e ricche di oggetti matematici (si pensi per esempio alle potenzialità che i sistemi di manipolazione numerico-grafico-simbolica offrono per l’acquisizione del concetto di funzione);

- l'opportunità di prestare maggiore attenzione alla semantica che non alla sintassi: l'invito, esplicito nelle *Indicazioni per i licei*, è “Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, saranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici sarà strettamente funzionale alla comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina”. (*Indicazioni per i licei. Matematica. Linee generali e competenze*);
- la necessità di una coerenza *verticale* nello sviluppo dei percorsi di insegnamento e apprendimento, indispensabile per il raggiungimento di vere e solide competenze.

Gli ambiti di contenuto esplicitati nelle diverse indicazioni sono quindi gli ambiti nei quali si articolano le prove di matematica: essi costituiscono un primo elemento di classificazione delle domande e di organizzazione della restituzione dei risultati. Il riferimento ai traguardi di competenza è un elemento ineludibile considerato nella formulazione delle domande e nella elaborazione delle prove e costituisce un altro elemento, il più importante, nella classificazione delle domande. L'attenzione agli aspetti semantici, al ruolo dell'argomentazione, alla coerenza verticale è parte essenziale del lavoro di preparazione delle prove.

Come scritto esplicitamente anche nelle *Indicazioni per il primo ciclo*, “Il sistema di valutazione nazionale ha il compito di rilevare la qualità dell'intero sistema scolastico, fornendo alle scuole, alle famiglie e alla comunità sociale, al Parlamento e al Governo elementi di informazione circa la salute e la criticità del nostro sistema di istruzione. L'Istituto di valutazione rileva e misura gli apprendimenti con riferimento ai traguardi e agli obiettivi previsti dalle Indicazioni, promuovendo, altresì, una cultura della valutazione che scoraggi qualunque forma di addestramento finalizzata all'esclusivo superamento delle prove. La promozione, insieme, di autovalutazione e valutazione costituisce la condizione decisiva per il miglioramento delle scuole e del sistema di istruzione poiché unisce il rigore delle procedure di verifica con la riflessione dei docenti coinvolti nella stessa classe, nella stessa area disciplinare, nella stessa scuola od operanti in rete con docenti di altre scuole. Nell'aderire a tale prospettiva, le scuole, al contempo, esercitano la loro autonomia partecipando alla riflessione e alla ricerca nazionale sui contenuti delle Indicazioni entro un processo condiviso che potrà continuare nel tempo, secondo le modalità previste al momento della loro emanazione, nella prospettiva del confronto anche con le scuole e i sistemi di istruzione europei”.

Emerge chiaramente, nel passo precedente, che solo l'azione coordinata del sistema nazionale di valutazione (che, con la rilevazione e la misura degli apprendimenti, attraverso prove standardizzate, fornisce alle scuole informazioni sulle criticità del nostro sistema di istruzione) e delle scuole (che devono avviare una riflessione sulle informazioni di cui entrano in possesso per avviare azioni utili a migliorare l'offerta formativa) può conseguire l'obiettivo di favorire l'insegnamento-apprendimento della matematica e di raggiungere gli obiettivi in termini di traguardi per le competenze e di contenuti irrinunciabili.

In questo senso, va sottolineato che il riferimento alle diverse indicazioni è inteso in senso globale e non solo puntuale. I diversi documenti alla base della predisposizione delle prove (*Indicazioni Nazionali per il Primo ciclo*, *Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei*, *Linee Guida per l'Istruzione Tecnica e Professionale*) contengono tutti un forte ed esplicito riferimento (derivante dalla loro comune origine dagli *Assi culturali* per l'obbligo di istruzione) alla matematica come elemento fondamentale per le competenze di cittadinanza e per le *Life skills*, le competenze per la vita. Ogni prova viene quindi costruita pensando non solo agli apprendimenti specifici di quel livello scolastico, ma alle competenze generali e permanenti che lo studente, in quello specifico livello scolastico, dovrebbe aver acquisito grazie a tutto il percorso precedente. Le prove possono quindi contenere domande che accertano il permanere di abilità o di conoscenze acquisite in livelli precedenti, la cui padronanza è essenziale per l'esercizio di queste competenze.

Quanto appena detto è fondamentale per chiarire limiti e compiti dell'azione del sistema di valutazione, in particolare attraverso l'uso di prove standardizzate. Questo strumento, infatti, mentre risulta particolarmente utile a dare informazioni su alcune criticità del sistema nel suo complesso, è poco adatto a misurare il conseguimento di alcuni dei traguardi per il raggiungimento delle competenze elencati nelle indicazioni. Per esempio mentre le prove standardizzate sono uno strumento sicuramente utile per valutare i traguardi "Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure" e "Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza", possono essere meno adeguate a valutare pienamente un traguardo come "Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri" e sono sicuramente non adeguate a valutare il traguardo "Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica".

In questo senso le prove standardizzate non devono né possono sostituirsi all'azione dell'insegnante per la valutazione degli studenti della propria classe: i risultati delle prove possono essere utilizzati come una fra le molte informazioni di cui l'insegnante deve entrare in possesso per valutare dinamicamente le prestazioni dei propri studenti e certificare le competenze raggiunte, ma non possono costituire l'unica sorgente di informazioni, né la più privilegiata per la valutazione del singolo alunno, essenzialmente per tre motivi:

- le prove standardizzate, come già detto, non possono misurare né tantomeno valutare il conseguimento di traguardi caratterizzati da aspetti metacognitivi o non cognitivi, come per esempio "Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà"; analogamente, almeno come sono attualmente strutturate, le prove standardizzate non consentono di valutare la competenza raggiunta dagli studenti nell'uso di tecnologie per costruire significati degli oggetti di studio;
- le prove standardizzate sono poco adatte a valutare pienamente il conseguimento di competenze nel: sostenere argomentazioni e dimostrazioni complesse; porsi e risolvere problemi di una certa difficoltà e complessità, che richiedono diversi passi per essere affrontati e risolti; costruire e utilizzare modelli per situazioni complesse;
- le prove standardizzate tendono a porre domande le cui risposte siano indipendenti da chi corregge; in altri termini tendono, per quanto possibile, a eliminare ogni elemento di soggettività. Invece la valutazione che l'insegnante fa delle competenze conseguite da uno studente non può non essere soggettiva, dipendente anche da fattori sociali e affettivi, e tesa anche a promuovere l'acquisizione stessa delle competenze: tanto più è soggettiva, tanto più diventa adatta allo studente che viene valutato e quindi ricca e significativa per quello studente.

D'altra parte, la possibilità di avere informazioni su diversi aspetti dell'apprendimento, confrontabili con le informazioni sugli stessi aspetti relative a gruppi di studenti simili fra loro come *background* socio-economico e culturale, è uno strumento in mano a ogni insegnante per valutare (nel senso più ampio della parola) in modo più completo i propri allievi e migliorare continuamente la propria azione didattica.

Un addestramento degli studenti ad affrontare prove simili a quelle delle Rilevazioni Nazionali risulterebbe del tutto inutile, se non addirittura controproducente per l'insegnamento e per la Scuola; è invece importante curare l'effettiva crescita di quel retroterra cognitivo e culturale di cui le prove INVALSI dovrebbero rilevare e valutare l'esistenza, per poi stimolarne lo sviluppo.

4. La struttura delle prove

4.1 Le caratteristiche generali delle prove e le tipologie delle domande

Le prove di matematica delle Rilevazioni Nazionali dell'INVALSI, nella versione cartacea fino a ora somministrata, sono costituite da fascicoli comprendenti un numero variabile di domande che a loro volta possono essere articolate in diversi *item*. L'ordine delle domande e delle opzioni di risposta può variare, con determinati vincoli, all'interno dei diversi fascicoli presentati agli studenti.

Ogni domanda è costruita con uno specifico *scopo della domanda* (simile al *question intent* del QdR OCSE-PISA 2012) che definisce in modo specifico, anche in termini di conoscenze, che cosa si vuole principalmente valutare con quel quesito. Ogni domanda è inoltre esplicitamente collegata a un traguardo di competenza (si veda l'allegato 7.A).

Le prove di matematica sono costituite da quesiti di diverse categorie: a risposta chiusa, a risposta aperta univoca, a risposta aperta, *cloze*.

La prima categoria consiste in quesiti con risposta a scelta multipla che presentano tre (nella classe seconda primaria) o quattro alternative di risposte (una sola delle alternative di risposta è corretta) o in item MCC, cioè costituiti da una serie di affermazioni a cui si risponde con una scelta V/F o Sì/No (in genere 3, 4 o 5), la cui risposta viene in generale conteggiata come un unico item.

I quesiti a “risposta aperta univoca” sono domande suscettibili di una valutazione rapida e sicura che richiedono, per esempio, il risultato di un calcolo algebrico o numerico oppure la determinazione del valore di verità di determinate proposizioni o, ancora, di disegnare o indicare un elemento di una figura.

I quesiti a “risposta aperta” possono richiedere semplici argomentazioni, giustificazioni, sequenze di calcoli. Per questi quesiti viene fornita una griglia di correzione articolata, costruita in base alle risposte ottenute nel pretest. Per queste domande è inevitabile che ci sia una certa discrezionalità nella correzione. La griglia di risposta prevede anche la categoria delle risposte *accettabili*: risposte che non sono propriamente corrette ma dalle quali si evince che lo studente ha risposto adeguatamente, considerando lo specifico *scopo della domanda*. La griglia di risposta può anche comprendere esempi espliciti di risposte accettabili o non accettabili, individuate a partire dalle risposte fornite dagli studenti in sede di pretest.

I quesiti di tipo “*cloze*” richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni mediante l'utilizzo di elementi forniti nel testo.

Come verrà dettagliato nel paragrafo seguente, la divisione dei contenuti matematici in ambiti è ormai condivisa a livello internazionale. Ogni domanda è classificata in un determinato ambito, che è sempre da considerarsi solo come l'ambito *prevalente* (e non esclusivo) di riferimento; questa classificazione è poi alla base della successiva restituzione dei risultati.

Nella costruzione (e nella successiva restituzione dei risultati) delle domande si tiene conto anche di una direzione trasversale ai contenuti, che si riferisce ai processi che vengono coinvolti nell'azione dell'allievo. Questa direzione trasversale, nelle ultime prove, è stata definita in maniera più esplicita, a partire dal quadro di riferimento per le Indicazioni di legge e in particolar modo dai traguardi per lo sviluppo delle competenze. Il gruppo di lavoro INVALSI sulle prove di matematica ha quindi individuato un possibile raggruppamento di competenze secondo tre dimensioni denominate: *Risolvere Problemi*, *Argomentare*, *Conoscere*. Tale raggruppamento deriva anche da esigenze connesse con l'analisi statistica e la restituzione dei risultati delle prove INVALSI e con la necessità di orientare la lettura degli esiti in accordo con i traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria e della secondaria di primo grado³. Per la scuola secondaria di secondo grado

³ http://www.indicazioninazionali.it/documenti/Indicazioni_nazionali/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

(livello 10) e quindi per la conclusione dell'obbligo scolastico non sono previsti, dalla normativa vigente, traguardi per lo sviluppo delle competenze. Il gruppo di lavoro INVALSI ha individuato una serie di traguardi per lo sviluppo delle competenze per la fine dell'obbligo scolastico in diretta continuità con i traguardi della fine del primo ciclo. Le tre aree derivano inoltre da riflessioni su aspetti ed elementi salienti delle attività matematiche e su risultati importanti della ricerca in didattica della matematica, nonché da una accurata analisi delle prove fino a ora somministrate e dei loro risultati.

Risolvere problemi e Argomentare

Le diverse attività matematiche si possono aggregare attorno a due poli in rapporto fra loro: la risoluzione di problemi (interni alla matematica o applicativi) e l'argomentazione, nelle sue diverse specificazioni e articolazioni: dall'accertare la ragionevolezza di un'affermazione, al validarla con riferimento a una teoria (dimostrazione); dal controllare la correttezza di un risultato, al giustificare la sua adeguatezza in relazione al problema affrontato. Il rapporto fra la risoluzione di problemi e l'argomentazione dipende dal fatto che la costruzione di un'argomentazione è in molti casi una attività di autentico *problem solving* e, d'altra parte, il *problem solving* richiede in genere attività di validazione intermedie e finali di tipo argomentativo. La centralità assunta dal *problem solving* e dall'argomentazione nella formazione e nella ricerca educativa in campo matematico è stata anche una conseguenza di un dato storico inconfutabile: il fatto che calcolatrici e computer mettono a disposizione notevoli risorse per svolgere in modo assai efficace ed economico tutte le attività matematiche di tipo esecutivo e insieme evidenziano la necessità di sviluppare competenze di decisione, di scelta e di controllo, che rimangono prerogative umane.

Per quanto riguarda i problemi, è bene avere chiaro il fatto che attraverso le prove INVALSI è difficile accertare una competenza importante come l'orientarsi in una situazione problematica fino a individuare il problema da affrontare (*problem posing*) ed è anche difficile accertare la capacità di affrontare un problema "grezzo" procurandosi i dati necessari per risolverlo. Questo fissa un primo limite per le competenze accertabili con le prove INVALSI.

Per quanto riguarda la dimensione Argomentare la scelta dell'affermazione corretta e l'individuazione della sua giustificazione tra quelle proposte è oggetto di accertamento nelle prove INVALSI. Più arduo appare costruire quesiti che richiedono di scegliere l'affermazione corretta e di produrre una giustificazione per essa. Ancora più arduo, per non dire impossibile allo stato attuale di elaborazione delle prove, appare accertare la capacità di produrre e poi giustificare un'affermazione a partire da un quesito aperto del tipo "ipotizzare e verificare" e, più in particolare, del tipo "congetturare e dimostrare". Questo determina un altro limite per le competenze accertabili con le prove INVALSI nelle aree del *Risolvere problemi* e dell'*Argomentare*.

Conoscere

Le due attività matematiche Risolvere problemi e Argomentare richiedono conoscenze su oggetti matematici tradizionalmente definiti come "concetti", segni e sistemi di segni, algoritmi e tecniche di trattamento oltre alla capacità di farne uso stabilendo connessioni fra essi. In questo senso possiamo parlare di competenze strumentali al *problem solving* e all'argomentazione che devono essere accertate proprio per questo carattere di strumentalità necessaria allo svolgimento di compiti più complessi. Gli studi su che cosa significa e come si realizza la padronanza degli oggetti matematici nella ricerca in didattica della matematica si sono sviluppati in parallelo, e spesso in interazione, con le ricerche nelle scienze dell'educazione. A partire dall'analisi delle competenze necessarie per affrontare compiti professionali specifici, condotta negli anni '70, le competenze sono state progressivamente identificate come "unità" di conoscenze e capacità e intenzione di farne uso per affrontare compiti. Oggi riguardano anche i sistemi di formazione, inclusa la scuola, che sono investiti del compito di sviluppare e accertare, nel caso della scuola italiana di *certificare*, competenze e non solo conoscenze.

Nel tentativo di raggruppare competenze nelle tre aree del Conoscere, del Risolvere problemi e dell'Argomentare è inoltre necessario tener conto di una dimensione trasversale alle tre aree, che riguarda gli aspetti semiotici dell'attività matematica. L'attività matematica si esercita attraverso segni verbali e non verbali (espressioni algebriche, figure geometriche, grafi, grafici, schemi, ecc.); essi sono presenti, con funzioni specifiche diverse, nei prodotti dell'attività matematica e nel processo di produzione, nel lavoro individuale e nell'interazione tra le persone impegnate nel risolvere un problema. La dimensione semiotica assume tuttavia caratteristiche assai diverse nelle tre dimensioni in sede di accertamento delle competenze. Queste diversità giustificano la scelta di non aggregare traguardi e competenze secondo una dimensione semiotica (il rappresentare) peraltro pervasiva.

Durante le prove può essere previsto (a seconda del livello) l'uso della calcolatrice⁴ (a condizione che essa non sia quella dei telefoni cellulari e che non sia collegabile alla rete internet né a qualsiasi altro strumento, per esempio, tramite bluetooth, wireless, ecc.) e l'uso di strumenti da disegno (riga, squadra, compasso, goniometro). È possibile che per certe prove sia fornito un *formulario*. Il tempo a disposizione per la prova è definito livello per livello.

4.2 I principi di formulazione delle domande e i criteri di costruzione dei fascicoli

Le domande sono costruite con l'obiettivo di essere chiaramente comprese nel loro *scopo*. Per questo è posta un'attenzione particolare ai diversi aspetti della loro formulazione linguistica: in questo modo si cerca di evitare che una non necessaria difficoltà di tipo linguistico renda meno precisa l'informazione restituita relativa alla competenza matematica.

Per quanto riguarda gli aspetti lessicali vengono evitati accuratamente tutti i termini che hanno una connotazione regionale o dialettale; soprattutto nelle classi della scuola primaria il ricorso a termini non presenti nel vocabolario di base è limitata ai casi strettamente indispensabili e, quando necessario, vengono chiariti o definiti. I termini tecnici specifici della matematica vengono utilizzati coerentemente con le conoscenze tecnico-terminologiche delle classi testate, evitando i tecnicismi inutili.

Dal punto di vista sintattico le domande cercano di preferire forme semplici, sempre con l'obiettivo della massima chiarezza e intelligibilità del testo e in particolar modo della consegna. Una struttura sintattica complessa è giustificata solo quando è necessaria per esprimere una complessità di situazioni.

I contesti scelti per le domande possono essere di tipo familiare, scientifico o relativi alla comune esperienza degli studenti. In generale i contesti devono essere significativi relativamente alla matematica che vi viene coinvolta.

Le tabelle con i dati utilizzate nelle domande provengono, se possibile, da vere basi di dati; possono essere eventualmente semplificate o adattate. Le immagini sono utilizzate quando contengono elementi importanti o informazioni o se aiutano l'allievo (soprattutto nella scuola primaria) a formarsi una immagine della situazione.

Le prove sono costruite assemblando in maniera equilibrata domande classificate nei diversi ambiti, nelle diverse dimensioni e per le quali i pretest abbiano indicato capacità di fornire informazioni significative lungo tutta la gamma di abilità degli studenti.

⁴ L'evoluzione delle prove verso la modalità *computer based* (CBT) prevede necessariamente anche un'evoluzione degli strumenti a disposizione degli studenti.

4.3 Gli autori delle domande e delle prove

Nel complesso il percorso di produzione di una prova dura dai due ai tre anni e inizia con la produzione delle domande da parte degli *autori*.

Gli autori delle domande sono tutti insegnanti o dirigenti del sistema nazionale di istruzione. La formulazione delle domande avviene sia individualmente che, soprattutto, in gruppi di autori. Nel processo di formulazione gli autori sono affiancati da esperti e per gli autori vengono organizzati periodicamente seminari di formazione.

Con le domande prodotte dagli autori vengono preparati i fascicoli per il pretest. Le prove da pretestare sono assemblate da gruppi di lavoro, uno per ogni livello testato, composti da insegnanti, dirigenti, ricercatori, esperti INVALSI. I gruppi di lavoro procedono anche alla revisione linguistica e alla sistemazione grafica. Vengono pretestati diversi fascicoli per ogni livello.

4.4 Il pretest

Il pretest è un elemento fondamentale della preparazione delle prove. Per ogni livello viene individuato un campione rappresentativo di studenti a cui vengono somministrati i diversi fascicoli (che possono anche contenere varianti di formulazione della stessa domanda). I pretest vengono somministrati da operatori dell'INVALSI, nelle stesse condizioni previste per la prova. I fascicoli compilati vengono raccolti e codificati. A partire dai fascicoli raccolti vengono definite le indicazioni per la correzione che saranno poi riportate nelle griglie di correzione.

I dati del pretest sono elaborati dal servizio statistico dell'INVALSI utilizzando i modelli statistici abitualmente utilizzati per le valutazioni standardizzate. Tali modelli sono gli stessi utilizzati per le prove delle rilevazioni nazionali e sono presentati e descritti ogni anno nel Rapporto Tecnico.

I risultati del pretest sono studiati sia dal punto di vista statistico-misuratorio, sia dal punto di vista didattico.

Le prove che vengono somministrate nelle rilevazioni nazionali sono infine preparate da un gruppo di lavoro (unico per tutti i livelli per garantire la continuità verticale tra le prove) che, in base ai risultati del pretest, procede eventualmente a un'ultima sistemazione della formulazione delle domande e cura l'equilibrio definitivo (dal punto di vista degli ambiti di contenuto, delle dimensioni e del livello di difficoltà delle domande) del fascicolo nel suo complesso. Se le modifiche da apportare alle domande in base al pretest sono importanti, per tali domande si procede a un secondo pretest e dunque esse non entrano a far parte del fascicolo definitivo per quell'anno.

5. Le prove INVALSI nel panorama internazionale

Le principali indagini internazionali che rilevano competenze e conoscenze di matematica con cui il quadro di riferimento INVALSI condivide diversi aspetti sono: l'indagine della IEA denominata TIMSS⁵ (*Trends in Mathematics and Science Study*) e l'indagine dell'OCSE denominata PISA⁶ (*Programme for International Student Assessment*). Il TIMSS si rivolge agli studenti del quarto e dell'ottavo anno di scolarità e si svolge ogni quattro anni⁷. Il PISA, invece, si rivolge agli studenti quindicenni e si svolge ogni 3 anni. Entrambe queste indagini non si riferiscono soltanto alla matematica, ma anche alle scienze e, nel caso del PISA, anche alle competenze di lettura, di *problem solving* e di *financial literacy*.

Il TIMSS e il PISA indagano il livello di apprendimento degli studenti in matematica secondo due prospettive completamente diverse.

Il TIMSS utilizza il “curricolo”, nel senso più ampio del termine, come principale concetto organizzatore per comprendere le strategie didattiche utilizzate e individuare i fattori che possono influenzarne l'efficacia. Nell'indagine vengono utilizzate tre distinte nozioni di curricolo: curricolo previsto, curricolo realizzato e curricolo appreso. Partendo da questo modello TIMSS utilizza le prove per rilevare i livelli di rendimento degli studenti nei vari paesi (*curricolo appreso*) in matematica; tramite i questionari TIMSS raccoglie informazioni dettagliate sulle opportunità di apprendimento offerte agli studenti (*curricolo realizzato*). Per mezzo dell'*Encyclopedia* e del questionario sui curricoli, TIMSS mette a disposizione informazioni sul livello di preparazione degli studenti in matematica stabilito e atteso a livello centrale in ciascun paese (*curricolo previsto*).

Le prove sono costruite tenendo conto di due diverse dimensioni: i domini di contenuto e i domini cognitivi. I domini di contenuto sono gli argomenti valutati in matematica: numeri, geometria, algebra (solo per l'ottavo anno) e dati e probabilità. I domini cognitivi sono:

- conoscenza (*knowing*): comprende fatti, concetti e procedure che gli studenti devono conoscere;
- applicazione (*applying*): riguarda la capacità degli studenti di applicare conoscenze e concetti acquisiti per risolvere problemi o rispondere a domande;
- ragionamento (*reasoning*): va oltre la soluzione di problemi di *routine* per includere situazioni poco familiari agli studenti, contesti complessi e problemi risolvibili in diversi passaggi.

L'indagine PISA, invece, ha l'obiettivo generale di verificare se, e in che misura, i giovani che escono dalla scuola dell'obbligo abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita. Quindi il PISA⁸ non è interessato ai diversi curricoli scolastici, ma vuole indagare fino a che punto gli studenti siano in grado di utilizzare quanto hanno appreso a scuola per risolvere problemi collegati alla vita quotidiana (*literacy* matematica).

Le prove sono costruite a partire da tre diversi aspetti:

- il contenuto matematico: quantità, spazio e forme, cambiamento e relazioni, incertezza e dati;
- il contesto nel quale il quesito è situato: personale, occupazionale, scientifico o pubblico;

⁵ Quadro di riferimento dell'indagine TIMSS 2015 per la matematica:

http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_Frameworks_Full_Book.pdf

⁶ Quadro di riferimento dell'indagine PISA 2012 per la matematica:

<http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf>

⁷ Va anche ricordata l'indagine *TIMSS Advanced*, che si rivolge a studenti (in Italia) del tredicesimo anno di scolarità.

⁸ Alla base dell'indagine OCSE-PISA è la definizione di *mathematical literacy*, che nel quadro di riferimento per l'indagine 2015 è così esplicitata: “la capacità di un individuo di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Essa include la capacità di ragionare matematicamente e di usare concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo e a formulare giudizi e decisioni ben fondati, come richiesto a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi”. Cfr. PISA 2015 Mathematics Framework, versione *draft* marzo 2013.

- i processi matematici che si riferiscono ai tre momenti fondamentali dell'attività di risoluzione di un problema (*processes*), cioè a quello che un individuo fa per collegare il contesto di un problema alla matematica e quindi per risolverlo:

- formulare (*formulating*): riconoscere e identificare le opportunità di utilizzare la matematica in situazioni problematiche ed esprimere il problema contestualizzato in una forma matematica;
- utilizzare (*employing*): effettuare calcoli e manipolazioni e applicare i concetti e i fatti che si conoscono per arrivare a una soluzione matematica di un problema formulato matematicamente;
- interpretare (*interpreting*): riflettere in modo efficace su soluzioni e conclusioni matematiche, interpretandole nel contesto di un problema della vita reale e determinare se i risultati o le conclusioni a cui si è giunti siano ragionevoli.

Sottostanti a questi processi vi sono una serie di *mathematical capabilities*: Comunicazione - Matematizzazione - Rappresentazione - Ragionamento e argomentazione - Messa in campo di strategie per la risoluzione di problemi - Utilizzo del linguaggio simbolico, tecnico e formale e delle operazioni - Utilizzo di strumenti matematici.

La divisione dei contenuti in grossi blocchi è ormai condivisa a livello internazionale; è però interessante osservare il sostanziale parallelismo fra le scelte operate dall'Italia a partire dai documenti programmatici e le scelte operate a livello internazionale (OCSE-PISA 2015 e TIMSS 2015).

ARTICOLAZIONE DEI CONTENUTI			
SNV - INVALSI	PISA 2015	TIMSS 2015 IV Livello	TIMSS 2015 VIII Livello
Numeri	Quantità	Numero	Numero
Spazio e figure	Spazio e forme	Figure geometriche e misure	Geometria
Dati e previsioni	Incertezza e dati	Visualizzazione dati	Dati e probabilità
Relazioni e funzioni	Cambiamento e relazioni		Algebra

Per quanto riguarda gli aspetti di tipo cognitivo non esiste un parallelismo come quello presente per i contenuti. Infatti ciascuna indagine considera come elementi strutturali della matematica, per ciò che è di suo interesse, fattori diversi, che quindi fra loro si possono anche sovrapporre.

ASPETTI TRASVERSALI		
PROVE INVALSI	PISA 2015	TIMSS 2015
DIMENSIONI	PROCESSI	DOMINI COGNITIVI
Conoscere	Formulare	Conoscenza
Risolvere problemi	Utilizzare	Applicazione
Argomentare	Interpretare	Ragionamento

Il Quadro di riferimento delle prove INVALSI è dunque in linea con quello del TIMSS per alcuni aspetti e con quello del PISA per altri. Infatti, come descritto nel paragrafo 3, esso è fortemente legato alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida che contemplano sistematicamente una duplice visione della competenza matematica: da una parte gli aspetti di modellizzazione e le applicazioni per leggere, interpretare la realtà e risolvere problemi della vita concreta, così come nel PISA; dall'altra i contenuti articolati per ambiti, i costrutti caratteristici e gli aspetti relativi allo sviluppo interno della disciplina, così come per il TIMSS.

6. La restituzione dei risultati

6.1. Livelli di restituzione dei risultati: MIUR, scuola, classe

La restituzione dei risultati INVALSI è rivolta a utenti istituzionali diversi e fornisce, a seconda dei casi, informazioni di tipo diverso e con gradi differenti di approfondimento.

Abitualmente, entro la metà del mese di luglio viene presentato il Rapporto Nazionale, che riporta i dati dell'Italia e delle singole regioni delle rilevazioni sugli apprendimenti (Italiano e Matematica) condotte dall'INVALSI. Il rapporto si fonda sui risultati di un campione di classi dove la somministrazione delle prove è realizzata con la presenza in tutte le sue fasi di un osservatore esterno proprio con l'obiettivo di assicurare una maggior attendibilità dei dati. Per la prova standardizzata all'interno dell'esame di Stato alla fine del primo ciclo la funzione di osservatore è svolta dal Presidente di commissione.

In contemporanea al Rapporto Nazionale è pubblicato il Rapporto Tecnico, che descrive le caratteristiche misuratorie delle prove realizzate.

Il Rapporto Nazionale ha lo scopo di indicare ai principali decisori politici del sistema scolastico nazionale i risultati generali sugli apprendimenti degli alunni delle classi di riferimento, scorporati per regione e macro-area. I risultati sono inoltre restituiti per genere, per origine e per regolarità del percorso di studi. Dall'a.s. 2015-16 è anche restituita una stima del valore aggiunto delle scuole, il cosiddetto "effetto scuola" sull'apprendimento degli studenti al netto di tutti quei fattori che sfuggono al suo controllo e che pure hanno un'incidenza su di esso.

A partire dal mese di settembre dell'anno scolastico successivo a quello della somministrazione vengono restituiti i risultati a ogni singola istituzione scolastica, anche in questo caso con diversi livelli di approfondimento. I risultati sono restituiti per scuola nel suo complesso, per classe e per singolo studente. I dati restituiti dall'INVALSI riguardano fondamentalmente tre aspetti:

- l'andamento complessivo dei livelli di apprendimento degli studenti della scuola rispetto alla media dell'Italia, dell'area geografica e della regione di appartenenza;
- l'andamento delle singole classi nelle prove di Italiano e di Matematica nel loro complesso, scorpendo anche i dati rispetto ad alcune variabili (ad esempio la presenza di studenti stranieri);
- l'andamento della singola classe e del singolo studente analizzato nel dettaglio di ogni singola prova.

La lettura e l'interpretazione delle tavole e dei grafici possono essere quindi sia un utile strumento di diagnosi per migliorare l'offerta formativa all'interno della scuola, sia un mezzo per individuare aree di eccellenza e aree di criticità al fine di potenziare e migliorare l'azione didattica.

6.2 La restituzione alle classi dei risultati della prova di Matematica⁹

I risultati delle prove di matematica sono restituiti per ogni singola classe e per scuola nel suo complesso.

Si riportano alcuni elementi di restituzione dei risultati strettamente connessi al Quadro di riferimento per la matematica con esempi di percorsi di lettura e interpretazione.

⁹ Sul sito dell'INVALSI (https://INVALSI-areaprove.cineca.it/docs/tutorial_invalsi/tutorial.html) è disponibile un tutorial per la lettura e l'interpretazione delle restituzioni dei dati alle scuole e alle classi.

- a. *I risultati sono restituiti per Ambito* (Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni e Dati e previsioni).

Nel seguente esempio si può vedere che le quattro classi hanno risultati in generale superiori alla media nazionale salvo la Classe 3 in Numeri e la Classe 2 in Spazio e figure. I punti di forza sono rappresentati dagli ambiti Dati e previsioni e Relazioni e funzioni.

Restituzione dati 2016 per l'Istituzione scolastica XXXXXXX. Scuola Secondaria di Primo Grado - Classi terze - Prova Nazionale. Ruolo: Referente per la valutazione										
Tavola 3A Ambiti Matematica										
	Numeri		Dati e previsioni		Spazio e figure		Relazioni e funzioni		Prova complessiva	
Classi/Ist.	Punt. medio	Punt. Italia	Punt. medio	Punt. Italia	Punt. medio	Punt. Italia	Punt. medio	Punt. Italia	Punt. medio	Punt. Italia
Classe 1	50,7	47,4	53,2	51,5	43,0	38,7	64,8	52,9	53,6	48,1
Classe 2	48,6		54,0		37,4		56,5		49,7	
Classe 3	44,3		62,0		39,6		56,2		50,8	
Classe 4	51,6		58,2		44,3		56,5		53,0	
Istituto	48,9		56,4		41,0		58,8		51,8	

- b. *I risultati sono restituiti per Dimensione* (Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare).

Restituzione dati 2016 per l'Istituzione scolastica XXXXXXX. Scuola Secondaria di Primo Grado - Classi terze - Prova Nazionale. Ruolo: Referente per la valutazione								
Tavola 3B Dimensioni Matematica								
	Conoscere		Risolvere problemi		Argomentare		Prova complessiva	
Classi/Istituto	Punteggio medio	Punteggio Italia	Punteggio medio	Punteggio Italia	Punteggio medio	Punteggio Italia	Punteggio medio	Punteggio Italia
Classe 1	50,3	47,2	55,9	51,2	55,1	29,0	53,6	48,1
Classe 2	50,0		53,9		15,8		49,7	
Classe 3	51,3		53,6		25,6		50,8	
Classe 4	55,1		52,7		43,1		53,0	
Istituto	51,5		54,1		35,2		51,8	

Anche rispetto alle dimensioni i risultati, in generale, sono sopra la media nazionale, tuttavia un elemento di attenzione per la scuola e per i docenti di matematica in particolare, deve essere dato agli aspetti connessi alla dimensione Argomentare, soprattutto per le Classi 2 e 3.

I risultati per Ambito e Dimensione sono anche restituiti per origine degli alunni e per regolarità del percorso di studi.

- c. *I risultati restituiti consentono di effettuare confronti item per item.*

Per ognuna delle classi viene inoltre rilasciato il grafico relativo al confronto tra il risultato di classe e il risultato nazionale, item per item, suddivisi per ambito. Nel seguente esempio viene riportato questo grafico relativo alla Classe 2. Analizziamo, in particolare, l'andamento degli item nell'ambito Spazio e figure.

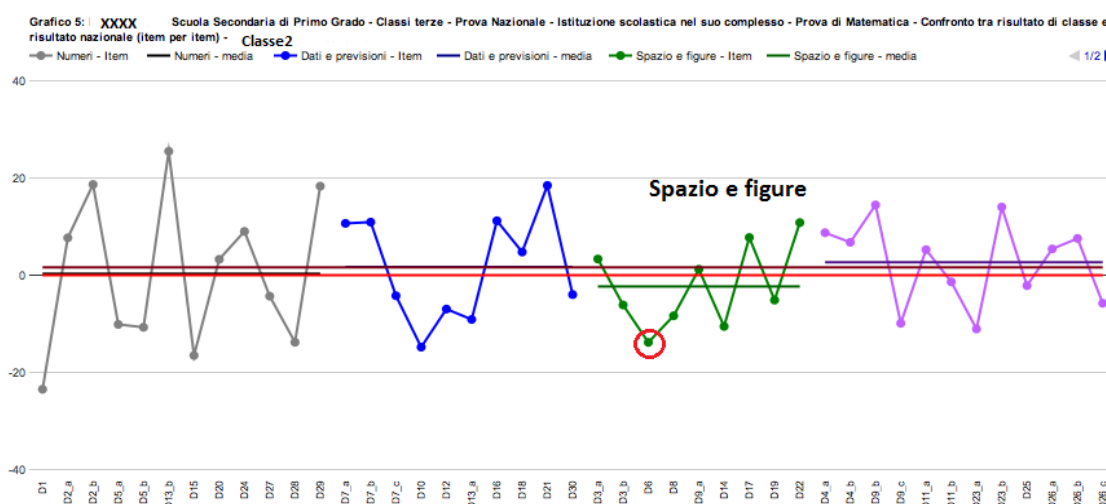


Fig. 1. Classe 2 – grafico item per item

A parte quattro item, gli altri hanno tutti avuto percentuali di risposte corrette inferiori alla media nazionale, in particolare la domanda D6 ha un andamento molto al di sotto di tale media (cerchietto rosso).

Il seguente grafico, invece, si riferisce alla Classe 3 e in particolare viene messo in luce l'andamento degli item dell'ambito Numeri che sono quelli che presentano più elementi di criticità.

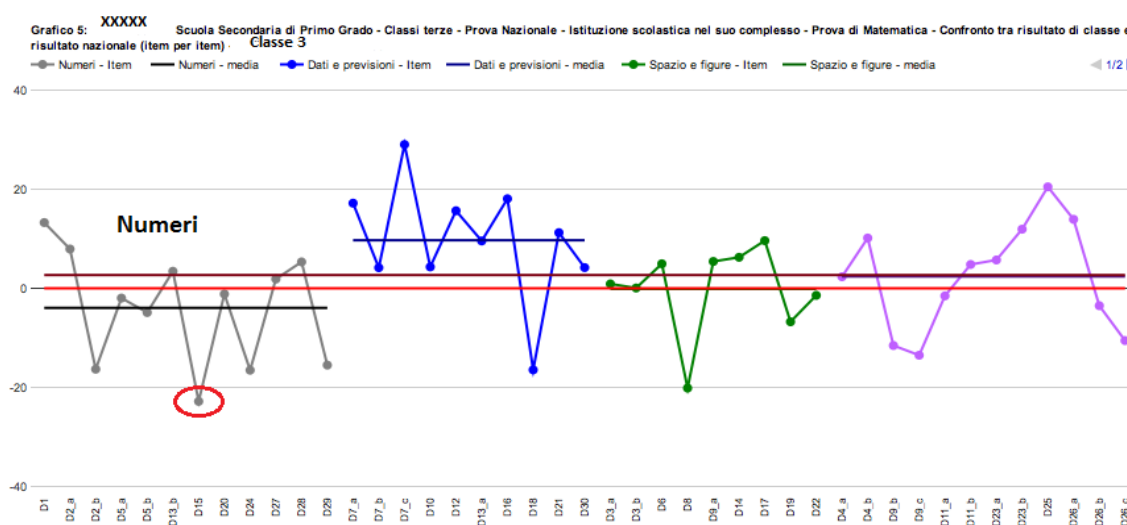
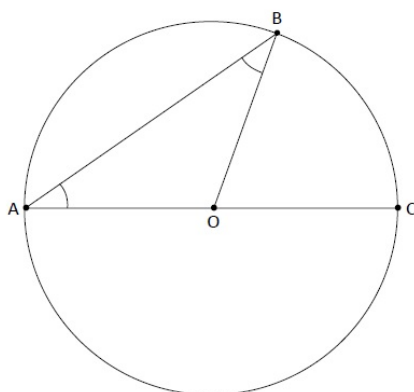


Fig. 2. Classe 3 – grafico item per item

Dal grafico emerge che la domanda che presenta un andamento che si discosta di molto dalla media nazionale è la D15 (vedi Fig. 2).

Una volta individuate le domande che hanno presentato i risultati più critici, è necessario andare a reperirne il testo e soprattutto verificarne le caratteristiche, in particolare l'ambito e la dimensione a cui afferiscono. Le percentuali di risposte corrette per ognuna delle domande è possibile confrontarle con il dato nazionale, riportato nel Rapporto Nazionale. I risultati possono segnalare ai docenti un punto di attenzione specifico di cui tenere conto nella progettazione didattica.

D6. Osserva la figura. AC è il diametro di una circonferenza di centro O.



Nel triangolo AOB, l'angolo $\widehat{BAO}$ è uguale all'angolo $\widehat{OBA}$. Immagina di muovere il punto B sulla circonferenza. Gli angoli $\widehat{BAO}$ e $\widehat{OBA}$ sono ancora uguali tra loro?

Scegli la risposta e completa la frase.

- ☐ Sì, perché
-
-
- ☐ No, perché
-
-

Fig. 3. Domanda D6 – PN 2016

D15. n è un numero naturale. Considera l'affermazione: "Se n è pari allora $n + 1$ è un numero primo". L'affermazione è vera o falsa?

Scegli la risposta e completa la frase.

- ☐ L'affermazione è vera perché
-
-
- ☐ L'affermazione è falsa perché
-
-

Fig. 4 - Domanda D15 – PN 2016

Si può notare che, in questi esempi, entrambe le domande afferiscono alla Dimensione dell'Argomentare che rappresenta anche l'area di maggiore criticità di queste due classi. È quindi possibile, attraverso approfondimenti via via successivi, individuare aspetti dell'insegnamento-apprendimento della matematica che richiedono attenzione da parte degli insegnanti.

6.3 Strumenti di supporto

INVALSI già da diverso tempo fornisce diversi strumenti di supporto per la scuola al fine di aiutare le scuole nella lettura dei risultati e nella analisi didattica dei singoli quesiti.

- **Rapporto risultati:** è il rapporto che, come già detto, viene presentato di norma all'inizio di luglio e riporta i risultati sulle rilevazioni degli apprendimenti dell'anno in corso¹⁰.
- **Rapporto tecnico:** contiene tutte le caratteristiche misuratorie delle prove INVALSI¹¹.
- **Guide alla lettura delle prove:** è uno strumento rivolto principalmente ai docenti. Per ognuno degli item della prova viene riportato il testo del quesito, le sue caratteristiche e un commento generale. Per quanto riguarda le caratteristiche, vengono riportati l'ambito e il processo prevalente a cui l'item appartiene, lo scopo per il quale è stato costruito, la dimensione e il riferimento alle Indicazioni nazionali (traguardo e, quando possibile, obiettivo di apprendimento). Per il secondo ciclo, coerentemente con il primo ciclo, si sono definiti traguardi per lo sviluppo delle competenze in continuità con il primo ciclo. Nell'area relativa al commento vengono riportate alcune considerazioni su possibili difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare nel rispondere a quel quesito, o, a volte, considerazioni di tipo didattico. In particolare, in caso di quesiti a scelta multipla, è riportata una spiegazione puntuale, dove possibile, del tipo di ragionamento errato a cui ciascun distrattore fa riferimento. Infine, per ogni item, sono restituiti i risultati del campione nazionale¹².

Come esempio si riporta la guida alla lettura relativa alle domande D6 e D15 viste precedentemente.

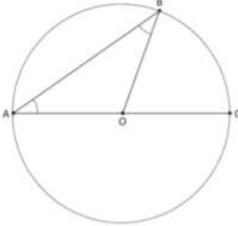
D6. Osserva la figura. AC è il diametro di una circonferenza di centro O.  Nel triangolo AOB, l'angolo BAO è uguale all'angolo OBA. Immagina di muovere il punto B sulla circonferenza. Gli angoli BAO e OBA sono ancora uguali tra loro? Scegli la risposta e completa la frase. ☐ Sì, perché ☐ No, perché	AMBITO PREVALENTE Spazio e figure SCOPO DELLA DOMANDA Riconoscere che i lati del triangolo sono raggi della circonferenza per una qualunque posizione del punto B sulla circonferenza. Conoscere ed applicare le proprietà del triangolo isoscele. PROCESSO PREVALENTE Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico. Indicazioni nazionali: TRAGUARDO Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). Indicazioni Nazionali: OBIETTIVO Conoscere definizioni e proprietà delle principali figure piane. DIMENSIONE Argomentare RISULTATI DEL CAMPIONE <table border="1"><thead><tr><th>Item</th><th>Mancante</th><th>Errata</th><th>Corretta</th></tr></thead><tbody><tr><td>D6</td><td>16,8%</td><td>59,5%</td><td>23,7%</td></tr></tbody></table>	Item	Mancante	Errata	Corretta	D6	16,8%	59,5%	23,7%	Risposta corretta Sì, perché Sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento al fatto che AO e OB sono congruenti in quanto raggi della circonferenza. Il triangolo AOB è dunque isoscele e gli angoli alla base sono congruenti. Il quesito richiede una visualizzazione "dinamica" della figura disegnata e di cogliere la relazione tra il raggio della circonferenza e i lati del triangolo. E' richiesta anche un'argomentazione della risposta corretta: l'alunno deve superare l'aspetto dell'evidenza e concatenare i passi del ragionamento in una dimostrazione. La mancata risposta potrebbe quindi indicare che l'alunno non riconosce che il lato del triangolo è il raggio della circonferenza, oppure che, pur visualizzando correttamente la relazione tra gli elementi al variare della posizione di B, l'alunno non sa produrre una giustificazione matematica. Si potrebbe arrivare alla risposta corretta anche attraverso la relazione tra angolo al centro BOC e angolo alla circonferenza BAC, ma il ragionamento risulta più complesso e richiede una padronanza superiore del processo argomentativo.
Item	Mancante	Errata	Corretta							
D6	16,8%	59,5%	23,7%							

Fig.5. Guida alla lettura relativa alla Domanda D6 – PN 2016

¹⁰ Per il 2016 è possibile scaricare il rapporto al seguente link:

https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2016.pdf

¹¹ Per il 2016 è possibile scaricare il rapporto al seguente link:

https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/002_Rapporto_tecnico_2016.pdf

¹² A questo link è possibile accedere alle Guide alla lettura delle prove INVALSI 2016:

https://invalsi-areaprove.cineca.it/index.php?form=precedenti_strumenti

D15. n è un numero naturale. Considera l'affermazione: "Se n è pari allora $n + 2$ è un numero primo". L'affermazione è vera o falsa? Scegli la risposta e completa la frase. ☐ L'affermazione è vera perché ☐ L'affermazione è falsa perché	AMBITO PREVALENTE Numeri SCOPO DELLA DOMANDA Riconoscere che il successivo di un numero pari non è necessariamente un numero primo. PROCESSO PREVALENTE Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico. Indicazioni nazionali: TRAGUARDO Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta. DIMENSIONE Argomentare RISULTATI DEL CAMPIONE <table><tr><th>Item</th><th>Mancante</th><th>Errata</th><th>Corretta</th></tr><tr><td>D15</td><td>21,6%</td><td>41,4%</td><td>37,1%</td></tr></table>	Item	Mancante	Errata	Corretta	D15	21,6%	41,4%	37,1%	Risposta corretta L'affermazione è falsa perché... Sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento a un contro esempio. Es. $20+1=21$ non è primo. Oppure affermazioni generali che fanno riferimento al fatto che con questo procedimento si trovano tutti i numeri dispari, ma non tutti i dispari sono numeri primi. L'alunno potrebbe verificare che i successivi dei numeri pari 2, 4 e 6 sono numeri primi ma ciò non autorizza la generalizzazione. Il quesito fa emergere il valore del contro esempio nella determinazione della falsità di un'affermazione.
Item	Mancante	Errata	Corretta							
D15	21,6%	41,4%	37,1%							

Fig.6. Guida alla lettura relativa alla Domanda D15 – PN 2016

- **Database** delle prove di Matematica e di Riflessione sulla lingua dal 2008 a tutt'oggi¹³: il data base è uno strumento che consente di individuare i quesiti attraverso una ricerca guidata che può essere fatta per:
 - anno di somministrazione;
 - livello scolastico (II e V primaria, I e III secondaria di I grado e II secondaria di II grado);
 - ambito (Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni);
 - contenuto matematico (es. retta dei numeri, Teorema di Pitagora, ecc.);
 - traguardo per lo sviluppo delle competenze e obiettivi di apprendimento (Indicazioni Nazionali 2012);
 - parole presenti nel testo delle domande.

In questo modo è possibile, per esempio, selezionare tutti i quesiti che riguardano lo stesso contenuto matematico per analizzare i diversi aspetti attraverso i quali un determinato contenuto matematico è inserito in un quesito delle prove INVALSI; oppure è possibile interrogare il database secondo un criterio di continuità didattica per vedere come un certo contenuto viene trattato nei quesiti delle prove INVALSI dalla II classe della scuola primaria alla II classe della secondaria di II grado.

Inoltre ogni domanda è accompagnata da areogrammi che rappresentano i risultati del campione nazionale e da grafici provenienti dalle analisi statistiche prodotte dall'INVALSI sulle singole domande.

¹³ Il database è disponibile per tutti i docenti al seguente indirizzo <http://www.gestinv.it/> e per accedere è sufficiente chiedere l'accesso a info@gestinv.it attraverso una mail.

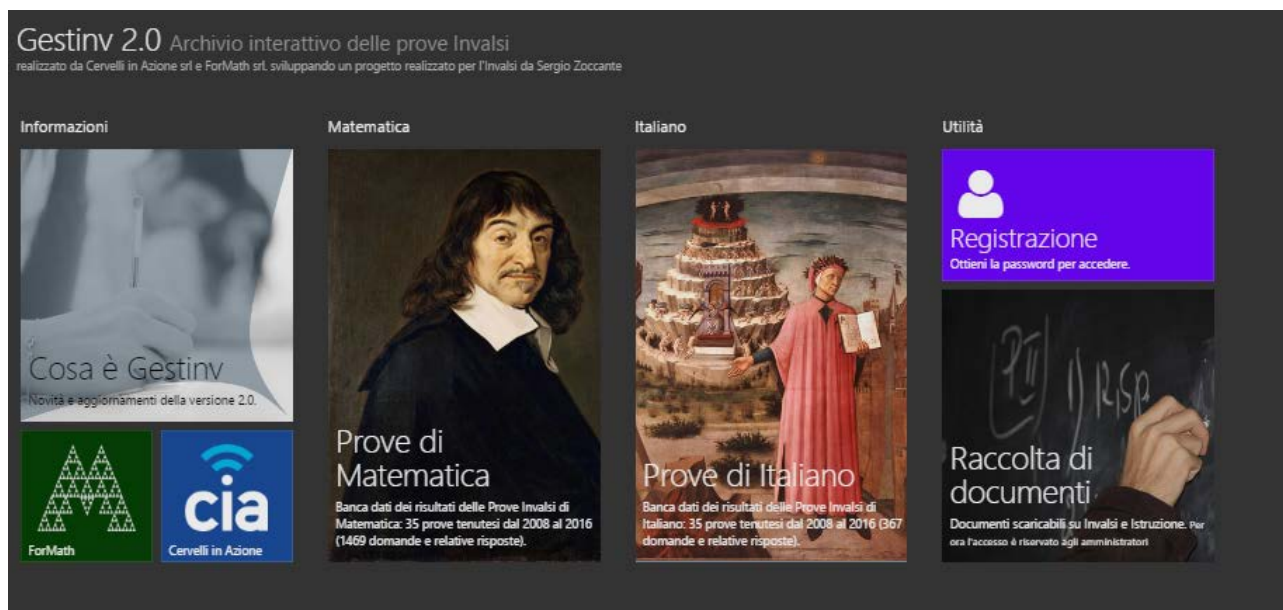


Fig. 7. Pagina iniziale della piattaforma Gestinv 2.0

- **Working papers:** sono articoli di approfondimento generale che INVALSI mette a disposizione sul proprio sito. Si segnala in particolare il lavoro di Angela Martini sul rapporto fra la Prova Nazionale INVALSI e l'esame di Stato alla fine del primo ciclo, già citato in precedenza¹⁴.
- **Tutorial multimediale** per la lettura dei dati: è uno strumento multimediale che guida nella lettura dei dati rilasciati da INVALSI a ogni singola scuola.
- **Eventi INVALSI:** sul sito INVALSI sono disponibili i materiali di una serie di eventi pubblici dove si possono trovare materiali specifici di approfondimento ed esperienze condotte dalle scuole sull'analisi dei risultati e dei quesiti delle prove INVALSI¹⁵.

¹⁴ Il link per accedere a questa sezione è il seguente:
http://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=working_papers

¹⁵ <http://www.invalsi.it/invalsi/istituto.php?page=eventi>

7. Allegato A: I Traguardi e le Dimensioni

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.	T1	1
Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.	T2	1
Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.	T3	1
Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).	T4	1
Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.	T5	2
Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.	T6	2
Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.	T7	3
Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.	T8	2
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.	T9	3
Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).	T10	1

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.	T1	1
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.	T2	1
Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.	T3	2
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.	T4	2
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.	T5	2
Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	T6	2
Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).	T7	3
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.	T8	3
Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ecc.) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.	T9	1
Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienta con valutazioni di probabilità.	T10	2

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di secondo grado	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.	T1	1
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.	T2	1
Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati, anche calcolando indici, per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.	T3	2
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.	T4	2
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	T5	2
Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.	T6	3
Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.	T7	3
Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).	T8	1
Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse	T9	2
Utilizza semplici modelli matematici dati per descrivere situazioni e fenomeni reali.	T10	2
Dati una situazione o un fenomeno reali individua le variabili significative e costruisce un modello matematico adeguato a rappresentarli.	T11	2
Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.	T12	2

Riportiamo anche la seguente tabella che riporta, affiancati, i traguardi dei diversi livelli scolari allo scopo di mostrarne la forte continuità.

Traguardi al termine della Scuola Primaria	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Primo Grado	Traguardi per la classe seconda della Scuola Secondaria di Secondo Grado
1. Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.	1. Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.	1. Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.
2. Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.	2. Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.	2. Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.
3. Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.		
4. Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro, ecc.).		
5. Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.	3. Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.	3. Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati, anche calcolando indici, per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.
6. Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.	10. Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienta con valutazioni di probabilità.	12. Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.

8. Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.	4. Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza. 5. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.	4. Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati. 5. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
9. Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri. 7. Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.	7. Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (per esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). 8. Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.	6. Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione. 7. Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.
10. Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ecc.).	9. Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.	8. Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).
	6. Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	9. Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.

7. Allegato B: Esempi di domande

I quesiti che seguono provengono dalle prove INVALSI degli ultimi anni e sono qui presentati con lo scopo di esplicitare il collegamento tra il QdR e le prove. Sono stati scelti esempi di quesiti di diversi formati (scelta multipla, risposta univoca, risposta aperta articolata), appartenenti a ciascuna delle tre dimensioni e dei quattro ambiti di contenuto del QdR. Molti degli esempi proposti presentano elementi di continuità verticale. Ogni domanda viene inoltre presentata con la classificazione fornita nella Guida alla lettura delle Prove INVALSI¹⁶. Per alcune domande sono riportati oltre ai traguardi anche gli obiettivi di apprendimento, così come presenti nelle guide.

Conoscere

Alla dimensione Conoscere afferiscono prevalentemente quesiti relativi alla padronanza di concetti, metodi, algoritmi e procedimenti. Le prime due domande di questa sezione riguardano, per due livelli diversi, la conoscenza della scrittura posizionale delle cifre mentre gli altri tre quesiti interessano la retta dei numeri per tre livelli successivi (L02, L05, L08).

D14. Quale numero corrisponde a 3 unità, 5 decine e 2 centinaia? A. ☐ 253 B. ☐ 532 C. ☐ 352	Livello 02 - 2015
	Formato: Scelta multipla
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Utilizzare correttamente la scrittura posizionale in base dieci
	Indicazioni nazionali Traguardi: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici. Obiettivi di apprendimento: <i>Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta.</i>

D24. In quale numero la cifra 3 vale 300? Trova il numero e cerchi.	

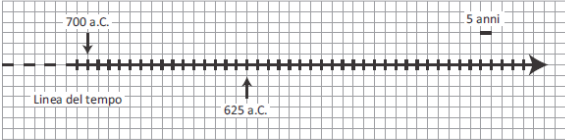
23 563	76,332
1 346,45	300 453
32,3	239
403,43	0,03

Livello 05 - 2012
Formato: Scelta multipla
Ambito: Numeri
Scopo della domanda Consapevolezza del valore delle cifre
Indicazioni nazionali Traguardi: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici. Obiettivi di apprendimento: <i>Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta.</i>

¹⁶ https://INVALSI-areaprove.cineca.it/index.php?form=precedenti_strumenti

D2. Osserva questa retta dei numeri.  a. Quale dei seguenti numeri va scritto nel posto indicato dal triangolino? A. ☐ 2 B. ☐ 10 C. ☐ 20 b. Sulla retta dei numeri disegnata <u>sopra</u> metti al posto giusto il numero 40.	Livello 02 - 2016
	Formato: Scelta multipla
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Posizionare numeri sulla retta: dalla posizione al numero e dal numero alla posizione. Indicazioni nazionali Traguardi: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). Obiettivi di apprendimento: <i>Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta</i>

D30. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri: 1,5 $\frac{6}{2}$ 3,8 $\frac{1}{2}$ 	Livello 05 - 2016
	Formato: Risposta univoca
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Conoscere le diverse rappresentazioni dei numeri e saperli posizionare sulla retta dei numeri. Indicazioni nazionali Traguardi: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). Obiettivi di apprendimento: <i>Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica</i>

D16. Talete e Pitagora sono due matematici dell'antichità. Talete nacque nel 625 a.C. e visse 85 anni. a. Con una freccia indica sulla linea del tempo l'anno di morte di Talete.  Quando nacque Pitagora, Talete aveva 50 anni. b. In che anno è nato Pitagora? Risposta: a.C.	Livello 08 - 2015 Formato: Risposta univoca Ambito: Numeri Scopo della domanda Muoversi lungo la linea del tempo Indicazioni nazionali Traguardi: Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni Obiettivi di apprendimento: Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta
---	---

	Livello 10 - 2016
	Formato: Scelta multipla complessa
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda
	Operare su numeri rappresentati sulla retta numerica senza conoscerne il valore esatto
	Indicazioni nazionali e Linee Guida
	Ordinamento dei numeri e loro rappresentazione su una retta. <i>Rappresentazione geometrica [dei numeri] su una retta.</i>
	Traguardi
	Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale)

D7.	Di tre numeri reali a , b e c non si conosce il valore; si sa, però, che la loro posizione sulla retta numerica è la seguente:																				
																					
Basandoti sulla figura, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).																					
	<table><tr><td></td><td></td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>a.</td><td>$-a > c$</td><td>☐</td><td>☐</td></tr><tr><td>b.</td><td>$\frac{1}{c} < b$</td><td>☐</td><td>☐</td></tr><tr><td>c.</td><td>$\sqrt{-a} > 0$</td><td>☐</td><td>☐</td></tr><tr><td>d.</td><td>$a + c < b$</td><td>☐</td><td>☐</td></tr></table>			V	F	a.	$-a > c$	☐	☐	b.	$\frac{1}{c} < b$	☐	☐	c.	$\sqrt{-a} > 0$	☐	☐	d.	$a + c < b$	☐	☐
		V	F																		
a.	$-a > c$	☐	☐																		
b.	$\frac{1}{c} < b$	☐	☐																		
c.	$\sqrt{-a} > 0$	☐	☐																		
d.	$a + c < b$	☐	☐																		

Risolvere problemi

Molti dei quesiti di questa dimensione hanno la caratteristica di poter essere risolti utilizzando strategie diverse e si presentano come situazioni realmente problematiche, difficilmente risolvibili con la mera applicazione di procedimenti noti. Le prime quattro domande di questa sezione riguardano la risoluzione di problemi di varia natura.

D15. Osserva l'operazione: $7 + 7 + 6 =$ Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con l'operazione nel riquadro? A. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio? B. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine in più di Mattia. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio? C. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine ha Mattia in più di Giorgio?	Livello 02 – 2012
	Formato: Scelta multipla
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica Indicazioni nazionali Traguardi: Riesce a risolvere facili problemi mantenendo il controllo sia sui processi risolutivi, sia sui risultati.

D22. Osserva la seguente figura. <table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>30 euro</td><td>13 euro</td></tr></table> Completa. <table><tr><td>Ogni</td><td></td><td>costa euro.</td></tr><tr><td>Ogni</td><td></td><td>costa euro.</td></tr></table>			30 euro	13 euro	Ogni		costa euro.	Ogni		costa euro.	Livello 05 – 2016 Formato: Risposta aperta Ambito: Relazioni e funzioni Scopo della domanda Interpretare e risolvere un problema presentato attraverso immagini Indicazioni nazionali Traguardo: Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
											
30 euro	13 euro										
Ogni		costa euro.									
Ogni		costa euro.									

- D26. Luisa e Giovanna utilizzano un numero diverso di mollette quando devono stendere più di un telo, come in figura.



Luisa



Giovanna

- a. Completa la seguente tabella.

Numero di teli	Numero di mollette per Luisa	Numero di mollette per Giovanna
2	4	3
3	6	4
4	8	5
6		
....	20	
....		20

- b. Quale fra le seguenti espressioni rappresenta il numero di mollette usate da Giovanna per stendere n teli?

- A. ☐ $n - 1$
 B. ☐ $n + 1$
 C. ☐ $2n - 1$
 D. ☐ $n + 2$

- c. Giovanna e Luisa stendono lo stesso numero di teli. Giovanna usa x mollette. Quale espressione permette di calcolare il numero di mollette che usa Luisa?

- A. ☐ $(x - 1) \cdot 2$
 B. ☐ $2x - 1$
 C. ☐ $x + 1$
 D. ☐ $x : 2 + 1$

Livello 08 - 2016

Formato:

- Risposta univoca
- Scelta multipla
- Scelta multipla

Ambito: Relazioni e funzioni

Scopo della domanda

- A partire dalla rappresentazione in tabella di due diverse relazioni tra la stessa variabile indipendente e le corrispondenti variabili dipendenti, calcolare i valori dell'una o dell'altra.
- Riconoscere la formula che modella la relazione, descritta da una tabella, tra variabile dipendente e variabile indipendente.
- Riconoscere la formula che modella la relazione tra le variabili dipendenti delle due relazioni descritte dalla tabella.

Indicazioni nazionali

Traguardi

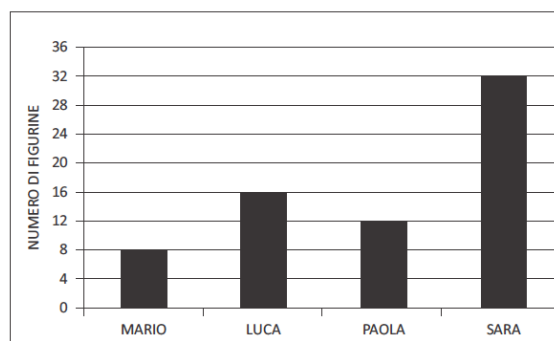
a. L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.

b. Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

Osservazione: l'item a afferisce alla dimensione Conoscere.

D13. Un palo verticale è piantato in uno stagno. Un quinto del palo è interrato nel fondale, un sesto è immerso in acqua e la parte del palo che esce dall'acqua è lunga 8,9 metri. a. Quale delle seguenti equazioni consente di determinare la lunghezza totale x del palo? A. ☐ $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + 8,9 = x$ B. ☐ $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = x + 8,9$ C. ☐ $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + x = 8,9$ D. ☐ $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 8,9 = x$ b. Qual è la lunghezza totale x del palo? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta il risultato. Risultato: m	Livello 10 - 2015
	Formato 1. Scelta multipla 2. Risposta aperta articolata
	Ambito: Relazioni e funzioni
	Scopo della domanda a. Passare dal registro verbale a quello simbolico e individuare l'equazione che consente di calcolare la lunghezza richiesta. b. Risolvere un'equazione di primo grado con coefficienti razionali.
	Indicazioni nazionali e linee guida Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e di disequazioni. <i>Risolvere equazioni e disequazioni di primo e secondo grado; risolvere sistemi di equazioni e disequazioni. Soluzioni delle equazioni di primo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, e tecniche necessarie alla loro risoluzione grafica e algebrica. Descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni.</i> Osservazione: l'item b afferisce alla dimensione Conoscere.
	Traguardi Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.

D3. Questo grafico rappresenta il numero di figurine che Mario, Luca, Paola e Sara hanno in tasca.



Osserva il grafico e rispondi.

- a. Luca ha il doppio delle figurine di Mario?
☐ Sì ☐ No ☐ Non si può sapere
- b. Luca ha solo una figurina in più di Paola?
☐ Sì ☐ No ☐ Non si può sapere
- c. Sara ha più anni di Luca?
☐ Sì ☐ No ☐ Non si può sapere

Livello 02 - 2015

Formato: Scelta multipla

Ambito: Dati e previsioni

Scopo della domanda

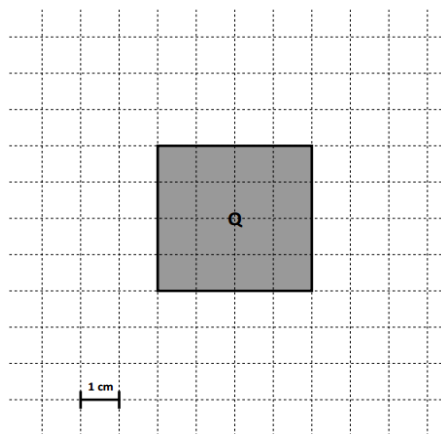
Leggere e interpretare un grafico

Indicazioni nazionali

Traguardi: Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.

Obiettivi di apprendimento: Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle.

D21. Osserva il quadrato Q.



Immagina di aumentare la lunghezza di ciascun lato di 2 centimetri. Qual è la differenza tra l'area del nuovo quadrato e l'area di Q?

- A. ☐ 8 cm^2
 B. ☐ 16 cm^2
 C. ☐ 20 cm^2
 D. ☐ 36 cm^2

Livello 05 - 2016

Formato: Scelta multipla

Ambito: Spazio e figure

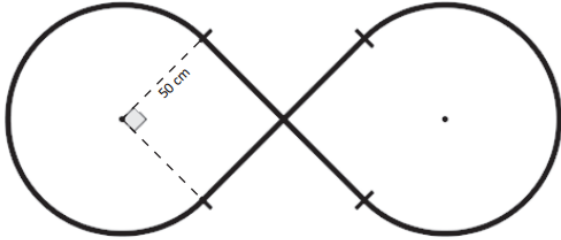
Scopo della domanda

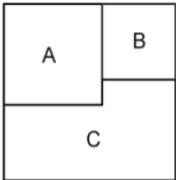
Valutare l'incremento dell'area di un quadrato all'aumentare del lato.

Indicazioni nazionali

Traguardi: Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.

Obiettivi di apprendimento: Utilizzare le principali unità di misura per lunghezze, angoli, aree, volumi/capacità, intervalli temporali, masse, pesi per effettuare misure e stime.

D17. La figura rappresenta lo schema di una pista formata da: • due archi di circonferenza di raggio 50 cm; • due tratti rettilinei di 100 cm ciascuno, perpendicolari tra loro nel punto medio.  Qual è la lunghezza della pista? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato. Risultato: circa cm	Livello 08 - 2013 Formato: Risposta aperta con richiesta calcoli Ambito: Spazio e figure Scopo della domanda Calcolare la lunghezza di un arco di circonferenza conoscendo il raggio. Indicazioni nazionali Traguardi: Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati Obiettivi di apprendimento: Calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza, conoscendo il raggio, e viceversa
---	---

D9. Un quadrato è formato da due quadrati A e B e da un poligono C, come mostrato in figura.  L'area di A è 16 e quella di B è 9. Calcola il <u>perimetro del poligono C</u>. Risposta:	Livello 10 - 2016 Formato: Risposta univoca Ambito: Spazio e figure Scopo della domanda Ricavare da una figura i lati di un poligono per calcolarne il perimetro Indicazioni nazionali e Linee Guida Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. <i>Conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano.</i> <i>Elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio.</i> Traguardi Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.
--	---

Argomentare

Per mettere in evidenza le caratteristiche di verticalità di questa dimensione si propongono solamente quesiti dell'ambito Numeri, di diversi formati. Per misurare questa dimensione si può infatti richiedere allo studente di scegliere l'argomentazione corretta tra diverse proposte (in particolare nella scuola primaria), oppure di produrre lui stesso l'argomentazione corretta. Negli esempi proposti per la seconda primaria si richiede all'alunno di scegliere la giustificazione corretta a una affermazione data, mentre per la quinta si richiede di individuare sia la risposta corretta (Sì/No) sia l'argomentazione che la giustifica. Nei quesiti per i due livelli successivi (L08, L10) si richiede invece di produrre un'argomentazione a giustificazione della verità o falsità di una affermazione, producendo un contro-esempio o una semplice dimostrazione. Si può osservare che nei quattro quesiti la richiesta di argomentazione diviene via via più complessa: dalla comprensione di un'argomentazione data alla produzione autonoma di un'argomentazione.

D11. Osserva il riquadro: $17 + 46 = 60 + 3$ Perché quello che è scritto nel riquadro è corretto? ☐ A. Perché ci sono due numeri a destra e due a sinistra del segno di uguale ☐ B. Perché il risultato della prima addizione è uguale al risultato della seconda addizione ☐ C. Perché 60 è il risultato di $17 + 46$	Livello 02 - 2010
	Formato: Scelta multipla
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Riconoscere un'argomentazione corretta
	Indicazioni nazionali Traguardi: Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.

D13. Osserva la seguente tabella.	Livello 05 - 2014									
<table><tr><td></td><th>Multipli di 4</th><th>Non multipli di 4</th></tr><tr><th>Pari</th><td></td><td></td></tr><tr><th>Dispari</th><td></td><td></td></tr></table>		Multipli di 4	Non multipli di 4	Pari			Dispari			Formato
	Multipli di 4	Non multipli di 4								
Pari										
Dispari										
a. Inserisci i seguenti numeri al posto giusto nella tabella.	a. Risposta univoca									
	b. Scelta multipla									
	Ambito: Relazioni e funzioni									
	Scopo della domanda									
	Riconoscere proprietà dei numeri									
	Indicazioni nazionali									
	Traguardi: Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.									
	Obiettivi di apprendimento:									
	Classificare numeri, figure, oggetti in base a una o più proprietà, utilizzando rappresentazioni opportune, a seconda dei contesti e dei fini.									
	Argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati.									

D15. n è un numero naturale. Considera l'affermazione: "Se n è pari allora $n + 1$ è un numero primo". L'affermazione è vera o falsa? Scegli la risposta e completa la frase. ☐ L'affermazione è vera perché ☐ L'affermazione è falsa perché	Livello 08 - 2016
	Formato: Risposta aperta articolata
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Riconoscere che il successivo di un numero pari non è necessariamente un numero primo.
	Indicazioni nazionali Traguardi: sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

D6. Marco afferma che, per ogni numero naturale n maggiore di 0, $n^2 + n + 1$ è un numero primo. Marco ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase. ☐ Marco ha ragione, perché ☐ Marco non ha ragione, perché	Livello 10 - 2014
	Formato: Risposta aperta articolata
	Ambito: Numeri
	Scopo della domanda Sapere falsificare, mediante un controesempio, una proposizione contenente un quantificatore universale
	Indicazioni nazionali e Linee Guida Le espressioni letterali e i polinomi. Padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile. <i>Elementi di base del calcolo letterale. Calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.</i>
	Traguardi Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.